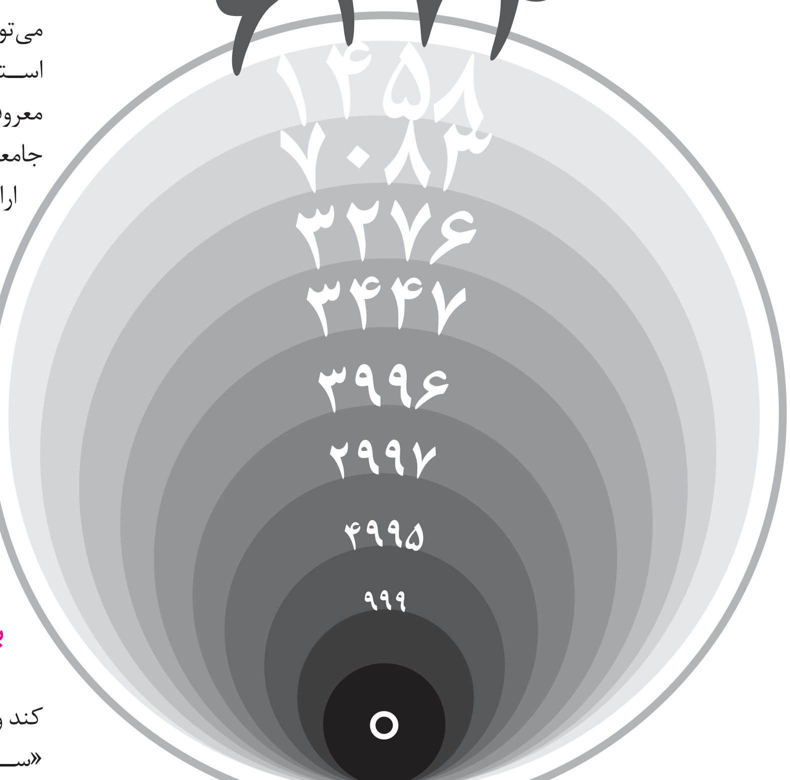
اسرا رضافدایی
دبیرستان فرزانگان حضرت زینب(س)، سمپاد، نوبت دوم شهری
غلامحسین رستگارنسب
دانشکده فنی‌وحرفه‌ای دختران دکتر شریعتی تهران

بررسی سیاهچالهٔ ۶۱۷۴



اشاره

آنچــه در این پژوهش مورد بررســی قرار گرفته، مســئلهٔ احتمالاً حل نشــدهٔ ســیاهچالهٔ عــدد ۶۱۷۴ اســت. در این پژوهش، با انجام محاســباتی ساده، الگوریتمی به‌دست آمد که می‌تواند به نوعی مسئله را حل کند. نکتهٔ مهم سادگی در ارائهٔ مطلب است، به‌طوری که هر فردی با دانستن پایهٔ ریاضیات دبیرستان قادر به درک و حل این مسئله خواهد بود.

کلیدواژه‌ها: سیاهچالهٔ عدد، الگوریتم، خاصیت‌های عدد، عملیات کاپرکا.

مقدمه

سیاهچالهٔ عدد ۶۱۷۴ در سال ۱۹۴۹ توسط **کاپرکا**[1] مطرح شد و بســیاری از ذهن‌ها را به چالش کشید. مســئله‌ای که کاپرکا بیان کــرد، این بــود که: چرا اگر ما یک عدد چهار رقمی را در نظر بگیریم (به‌طوری که مضربی از ۱۱۱۱ نباشد) و ارقام آن را از بزرگ به کوچک و ســپس از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و عدد کوچک‌تر را از عدد بزرگ‌تر کم کنیم و همین کار را دوباره روی عدد حاصل انجام بدهیم، حتماً به عدد ۶۱۷۴ می‌رسیم؟ ابتدا این مسئله آسان به‌نظر می‌رسد، اما سال‌هاســت که کسی نتوانسته است دلیل قانع‌کننده‌ای برای این موضوع بیاورد [1].

در مورد این مســئله صاحب‌نظران گوناگونی از سرتاســر جهان تحقیق و بررســی کرده‌اند و کوشیده‌اند آن را حل کنند. برای مثال، می‌توان به دکتر **اریک ولفگانگ وستین**[2]، **بردی هاران**[3] مستندساز اســترالیایی، و همچنین پروفسور **یوتاکا نیشــی یامــا**[4]، اقتصاددان معروف ژاپنی، اشــاره کرد. پروفسور یوتاکا نیشی یاما بررسی خوب و جامعی را در ســایت «plus maths» [۵] با عنوان عدد مرموز ۶۱۷۴ ارائه کرده است.

آنچه در این پژوهش بررسی شده این سؤالات است که:

- چرا همهٔ اعداد ۴ رقمی به ۶۱۷۴ می‌رسند؟
- چرا به عددی غیر از این عدد نمی‌رسند؟
- چه خاصیتی در عدد ۶۱۷۴ موجب شده است که تمامی اعداد را به خود جذب کند؟

این پژوهش به‌صورت کتابخانه‌ای و با استفاده از متون مرتبط و جامع و سایت‌های معتبر علمی و مصاحبه با افراد متخصص انجام گرفته است.

بحث و بررسی

هــرگاه هر عدد طبق رابطهٔ خاصی به‌صورت ســری ادامه پیدا کند و در انتها برای هر عدد به ارقام مشترک برسیم، به ارقام مشترک «ســیاهچاله» گویند [۶]. این تعریفی اســت که در متون و مقالات فارســی برای ســیاهچالهٔ اعداد بیان می‌شود. اما نکتهٔ قابل توجه این اســت که در مورد سیاهچالهٔ عدد ۶۱۷۴ تنها در متون فارسی از واژهٔ ســیاهچاله استفاده شده اســت و در متون انگلیسی از این مسئله با عنوان «عدد مرموز ۶۱۷۴»[5] [۷] یاد شده است.

برای شــروع یــک عدد ۴ رقمی را در نظــر بگیرید (به‌طوری که مضرب ۱۱۱۱ نباشد، یعنی ارقام آن یکسان نباشند.) سپس ارقام آن را از بزرگ‌تــر به کوچک‌تــر و برعکس مرتب کنید. عدد بزرگ‌تر را از عدد کوچک‌تر کم کنید. همین عملیات را دوباره روی باقی‌مانده انجام دهید (به این عملیات، عملیات کاپرکا می‌گویند). بعد از چند مرحله

حتماً به ۶۱۷۴ می‌رسیم. برای مثال:

$۳۴۵۲ \longrightarrow ۵۴۳۲-۲۳۴۵ = ۳۰۸۷$

$۳۰۸۷ \longrightarrow ۸۷۳۰-۳۷۸ = ۸۳۵۲$

$۸۳۵۲ \longrightarrow ۸۵۳۲-۲۳۵۸ = \underline{۶۱۷۴}$

حال سؤال این است که چرا همهٔ این اعداد به ۶۱۷۴ می‌رسند؟ برای شـــروع لازم است چند مورد از روابط حاکم بر این عملیات را پیدا کنیم.

ابتدا این معادله را به‌صورت پارامتری می‌نویسیم:

If: $a>b>c>d$ & $a\neq d$

(به نقل از سایت plus maths [۸])

$$\begin{cases} \quad a \qquad b \qquad c \qquad d \\ - \quad d \qquad c \qquad b \qquad a \\ \hline (a-d) \quad (b-۱-c) \quad (c+۹-b) \quad (d+۱۰-a) \end{cases}$$

If $b=c$ $(a-۱-d)$ $(b+۹-c)$ $(c+۹-d)$ $(d+۱۰-a)$

❋ **یکان:** d همیشـــه از a کوچک‌تر اســـت، بنابراین باید همواره یک واحـــد از دهگان کم کنیم و ده واحد به یکان اضافه کنیم. بنابراین می‌شود:

$c-۱$ & $d+۱۰-a$

❋ **دهگان:** برای c دو حالت وجود دارد: یا با b برابر اســـت و یا از آن کوچک‌تر است که در هر دو صورت به‌خاطر عملیات تفریق یکان، یک واحد از c کمتر شـــده و در حال حاضر از b کوچک‌تر اســـت. بنابراین می‌شود:

$b-۱$ & $c-۱+۱۰-b= c+۹-b$

❋ **صـــدگان:** برای b نیز دو حالت وجود دارد: یا با c برابر اســـت و یا از آن بزرگ‌تر اســـت. اگر از آن بزرگ‌تر باشد، می‌شود: $b-۱-c$. اما اگر با آن برابر باشد، چون به‌خاطر عملیات تفریق دهگان یک واحد از آن کم شـــده، حالا از c کوچک‌تر اســـت. پس باید یک واحد از هزارگان کم و ده واحد به صدگان اضافه کنیم که می‌شود:

$d-۱$ & $b-۱+۱۰-c= b+۹-c$

در ایـــن حالت چون b و c با هم برابرند، بنابراین جواب دهگان و صدگان برابر ۹ می‌شود:

$c+۹-d=۹$

$d+۹-c=۹$

❋ **هزارگان:** هزارگان بسته به یکی از حالات b و c نسبت به هم، یکی از حالات زیر می‌شود:

If $b\neq c$ then $d-a$

If $b=c$ then $d-۱-a$

اکنون این ارقام را در دستگاه قرار می‌دهیم:

If $b\neq c$

$$\begin{cases} a-d=y \\ d+۱۰-a=x \\ \hline x+y=۱۰ \end{cases} \qquad \begin{cases} b-۱-c=m \\ c+۹-b=n \\ \hline m+n=۸ \end{cases}$$

$(x+y) + (m+n)=۱۰+۸=۱۸$

از این کار دو نتیجه حاصل می‌شود:

۱. عدد به‌دســـت آمده از عملیاتی که در آن b با c برابر نباشـــد، مجموع ارقامش برابر ۱۸ است و بر ۹ نیز بخش‌پذیر است.

۲. مجموع یکان و هزارگانش برابر با ۱۰ است و مجموع صدگان و دهگانش برابر با ۸ است. پس برای تشخیص اینکه یک عدد می‌تواند عدد حاصل از یک عملیات باشـــد یا خیر، باید بررسی کرد که آیا مجموع دو رقمش ۱۰ و دو رقم دیگرش ۱۸ هست یا خیر.

اما باید عدد حاصلی را که در آن b=c است نیز محاسبه کنیم. همانند قبل این ارقام را در دستگاه می‌گذاریم:

If $b=c$

$$\begin{cases} d+۱۰-a=x \\ a-۱-d=y \\ \hline x+y=۹ \end{cases} \qquad \begin{cases} c+۹-b=۹ \\ b+۹-c=۹ \\ \hline \qquad =۱۸ \end{cases}$$

$x+y+۱۸=۹+۱۸=۲۷$

از این عملیات دو نتیجه حاصل می‌شود:

۱. اعداد حاصل از عملیاتی که در آن b با c برابر اســـت، مجموع ارقامش برابر با ۲۷ است.

۲. در این اعداد حداقل دو رقم باید ۹ باشند. بنابراین مجموع دو رقم دیگر باید ۹ باشد. پس در اعدادی که دو رقم c و b آن‌ها مساوی است، عدد حاصل آن‌ها باید بین چهار رقمش، دو رقم آن حتماً ۹ باشد و مجموع دو رقم دیگر نیز ۹ باشد.

بـــا اطلاعات به‌دســـت آمده می‌توانیـــم تمامی اعـــداد حاصله را بنویسیم:

If $b\neq c$

$x+y=۱۰ \rightarrow (x,y)=\{(۹,۱), (۸,۲), (۷,۳), (۶,۴), (۵,۵)\}$

$m+n=۸ \rightarrow (m,n)=\{(۸,۰), (۷,۱), (۶,۲), (۵,۳), (۴,۴)\}$

بنابراین اعداد حاصل به‌صورت زیر هستند:

{۹۸۱۰,۹۷۷۱,۹۶۲۱,۹۵۳۱,۹۴۴۱,۸۸۲۰,۸۷۲۱,۸۶۲۲,
۸۵۳۲,۸۴۴۲,۸۷۳۰,۷۷۳۱,۷۶۳۲,۷۵۳۳,۷۴۴۳,۸۶۴۰,۷۶۴۱,
۶۶۴۲,۶۵۴۳,۶۴۴۴,۸۵۵۰,۷۵۵۱,۶۵۵۲,۵۵۵۳,۵۵۴۴}

این اعداد در حالت مرتب شـده هستند و می‌توانند حالاتی دیگر هم البته با ارقام مسـاوی داشته باشند؛ برای مثال: ۵۶۴۳. طبق فرض مسـئله، ما بیشتر با حالت مرتب شده کار داریم و در شمارش نیز تنها تعداد حالت‌های مرتب شدهٔ ارقام را می‌شماریم.

If b=c

$x+y=۹ \rightarrow (x,y)$ or $(y,x)=\{(۹,۰), (۸,۱), (۷,۲), (۶,۳), (۵,۴)\}$

$m=n=۹$

اعداد حاصل با این فرض عبارت‌اند از:

{۹۹۹۰,۹۹۸۱,۹۹۷۲,۹۹۶۳,۹۹۵۴}

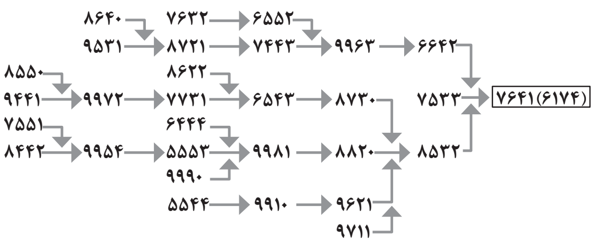
(در سایت «plus maths» [۹] این ۳۰ عدد توسط رایانه محاسبه و آورده شده و نویسندهٔ آن نیز بیان کرده است که علت رسیدن اعداد به این ۳۰ عدد هنوز پیدا نشـده اسـت که اکنون با انجام محاسباتی ساده دلیل آن را یافتیم.)

پـس همهٔ اعداد بعد از یک مرحله باید بـه یکی از این ۳۰ عدد برسند (این رابطه برای تمامی اعداد صدق می‌کند). بنابراین این ۳۰ عدد نیز باید با هم رابطه‌ای داشته باشند. برای پیدا کردن این روابط یک مرحله از عملیات روی هریک از این اعداد را انجام دهیم:

۹۸۱۰	۹۸۱۰-۱۸۹=۹۶۲۱
۸۸۲۰	۸۸۲۰-۲۸۸=۸۵۳۲
۸۷۳۰	۸۷۳۰-۳۷۸=۸۳۵۲
۸۶۴۰	۸۶۴۰-۴۶۸=۸۱۷۲
۸۵۵۰	۸۵۵۰-۵۵۸=۷۹۹۲
۹۷۱۱	۹۷۱۱-۱۱۷۹=۸۵۳۲
۸۷۲۱	۸۷۲۱-۱۲۷۸=۷۴۴۳
۷۷۳۱	۷۷۳۱-۱۳۷۷=۶۳۵۴
۷۶۴۱	۷۶۴۱-۱۴۶۷=۶۱۷۴
۷۵۵۱	۷۵۵۱-۱۵۵۷=۵۹۹۴
۹۶۲۱	۹۶۲۱-۱۲۶۹=۸۵۳۲
۸۶۲۲	۸۶۲۲-۲۲۶۸=۶۳۵۴
۷۶۳۲	۷۶۳۲-۲۳۶۷=۵۲۶۵
۶۶۴۲	۶۶۴۲-۲۴۶۶=۴۱۷۶
۶۵۵۲	۶۵۵۲-۲۵۵۶=۳۹۹۶
۹۵۳۱	۹۵۳۱-۱۳۵۹=۸۱۷۲
۸۵۳۲	۸۵۳۲-۲۳۵۸=۶۱۷۴
۷۵۳۳	۷۵۳۳-۳۳۵۷=۴۱۷۶
۶۵۴۳	۶۵۴۳-۳۴۵۶=۳۰۸۷
۵۵۵۳	۵۵۵۳-۳۵۵۵=۱۹۹۸
۹۴۴۱	۹۴۴۱-۱۴۴۹=۷۹۹۲
۸۴۴۲	۸۴۴۲-۲۴۴۸=۵۹۹۴

۷۴۴۳	۷۴۴۳-۳۴۴۷=۳۹۹۶
۶۴۴۴	۶۴۴۴-۴۴۴۶=۱۹۹۸
۵۵۴۴	۵۵۴۴-۴۴۵۵=۱۰۸۹
۹۹۹۰	۹۹۹۰-۹۹۹=۸۹۹۱
۹۹۸۱	۹۹۸۱-۱۸۹۹=۸۰۸۲
۹۹۷۲	۹۹۷۲-۲۷۹۹=۷۱۷۳
۹۹۶۳	۹۹۶۳-۳۶۹۹=۶۲۶۴
۹۹۵۴	۹۹۵۴-۴۵۹۹=۵۳۵۵

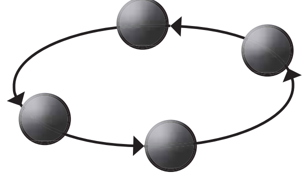
با این اطلاعات به‌دست آمده اکنون می‌توانیم نمودار ۱ را رسم کنیم:



نمودار۱ همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌کنید، اعداد پس از رسیدن به یکی از این اعداد حاصل، روندی از پیش تعیین شـده را طی می‌کنند [۱۰].

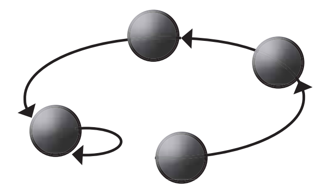
در اصل می‌توان کاری را که کاپرکا کرده است، به یک بازی تشبیه کرد. در این بازی پس از یک مرحله انجام عملیات کاپرکا روی یک عدد، عدد حاصل باید در میان یکی از ۳۰ عدد یاد شـده باشد. زمانی که به یکی از این اعداد می‌رسیم، عملیات کاپرکا دیگر، تنها میان ۳۰ عدد رد و بدل می‌شود. یعنی عدد اولیه به یکی از این ۳۰ عدد می‌رسد و عدد بعدی به یکی از میان خودشـان می‌رسد. عدد بعدی هم، همین‌طور و مانند یک زنجیره به هم می‌رسـند. اما این قضیه تا ابد نمی‌تواند ادامه پیدا کند، زیرا تعداد اعداد حاصل تنها ۳۰ عدد اسـت. پس جایی این زنجیره یا تمام می‌شود یا از نو شروع می‌شود.

اکنون باید بررسـی کنیم که زنجیره چگونه اسـت. برای داشتن زنجیره‌ای از اعداد که پس از یک دور دوباره از نو شروع شود، نیازمند یک عدد رابط هسـتیم. بدیـن معنا که این عدد رابـط پس از چند مرحلـه عملیات کاپرکا دوباره به خودش برسـد. زمانی که این عمل انجـام پذیرفت، اعداد زنجیرهٔ ما همـواره مانند یک حلقه به یکدیگر می‌رسند؛ همانند شکل ۱.



شکل۱ همان‌طور که می‌بینید، اعداد به‌صورت سلسله‌وار به‌هم می‌رسند..

و اما زنجیره‌ای که خاتمه می‌یابد، نیازمند یک عدد خاتمه‌دهنده است. این عدد باید این ویژگی را داشته باشد که بعد از یک مرحله دوباره به خودش برسد. زمانی که یک عدد با چنین ویژگی وجود داشته باشد، در اصل باعث شکست میان حلقه ما می‌شود؛ مانند شکل ۲.



شکل ۲ همان‌طور که گفته شد، عدد خاتمه دهنده باعث شکسته شدن زنجیره شده است.

در این حلقه تمامی اعداد به ناچار به عدد خاتمه‌دهنده می‌رسند. اما اگر حلقهٔ ما هیچ‌یک از این دو عدد را (خاتمه دهنده و رابط) دارا نباشد، زنجیره تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد و این نیازمند بی‌نهایت عدد است؛ در صورتی‌که ما تنها ۳۰ عدد داریم. پس زنجیرهٔ ما باید حداقل دارای یکی از این دو عدد باشد.

این مسئله نیازمند بررسی است. برمی‌گردیم به داده‌های به‌دست آمدهٔ قبلی. در میان این ۳۰ عدد، هیچ عددی وجود ندارد که دارای ویژگی‌های عدد رابط باشد. اما اگر دقت کنید درمی‌یابید که عددی با خواص عدد خاتمه‌دهنده وجود دارد. عدد ۶۱۷۴ عددی است که شما هر چند باری که عملیات کاپرکا روی آن انجام دهید، دوباره به همان عدد اولیه باز می‌گردید.

جواب سؤال‌هایی که ممکن است پیش بیایند، از این قرار است:

۱. شاید شما بپرسید: آیا این روند پس از رسیدن به یک عدد تکراری، یک دور متفاوت را نمی‌تواند شروع کند؟ در جواب باید گفت: زمانی که به یک عدد تکراری می‌رسیم، حتماً باید دوباره همان روند قبلی را تکرار کنیم و نمی‌توانیم وارد یک دور متفاوت شویم. زیرا یک عدد تنها به یک عدد می‌رسد. پس عدد تکراری به همان عدد قبلی می‌رسد و عدد بعدی هم همین‌طور. بنابراین همان روند قبلی را پیش می‌گیرد.

۲. آیا امکان وجود دو یا چند زنجیره از اعداد به‌طور جداگانه وجود دارد؟ در جواب باید گفت که امکان چنین اتفاقی وجود دارد. مثلاً در مورد اعداد ۹ رقمی دو زنجیرهٔ جداگانه وجود دارد. داشتن دو زنجیره نیازمند وجود دو عدد رابط و یا خاتمه‌دهنده است. پس اگر اعداد ۴ رقمی دارای دو زنجیرهٔ جداگانه باشند، به جز ۶۱۷۴ باید یک عدد خاتمه‌دهنده یا رابط دیگر نیز وجود داشته باشد.

نتیجه‌گیری

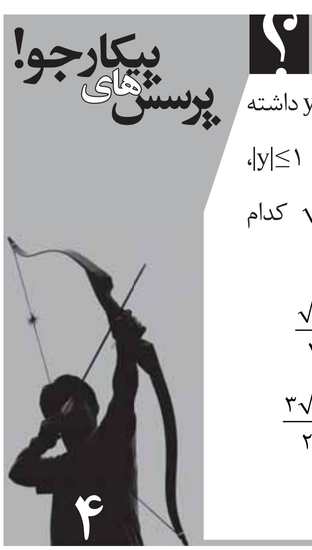
پس از بررسی‌های انجام شده، اکنون می‌توان رازهای عدد مرموز ۶۱۷۴ را بیان کرد. اولین و مهم‌ترین راز این عدد آن است که پس از انجام عملیات کاپرکا (یعنی تفریق دو عددی که حاصل مرتب کردن ارقام عدد اصلی به‌صورت نزولی و صعودی هستند) روی ۶۱۷۴، دوباره به ۶۱۷۴ می‌رسیم. دومین راز این است که با انجام عملیات کاپرکا روی اعداد، یک سری اعداد حاصل می‌شوند که این اعداد دارای ویژگی‌های خاص خود هستند. ویژگی‌های مزبور موجب می‌شوند که پس از انجام یک مرحله عملیات کاپرکا وارد الگوریتمی شویم که در آن تنها ۳۰ عدد وجود دارد (تنها حالت مرتب شده از بزرگ به کوچک اعداد حاصل محاسبه شده‌اند). این دو راز موجب شده‌اند که تمامی اعداد ۴ رقمی تنها به عدد ۶۱۷۴ برسند. به بیانی دیگر، عدد ۶۱۷۴ تمامی اعداد ۴ رقمی را به خود جذب می‌کند.

***پی‌نوشت‌ها**

1. Kaperka
2. Eric Wolfgang Weisstein
3. Brady John Haran
4. Yutaka Nishiyama
5. Mysterious number 6174

***منابع**

1. https://plus.maths.org/content/mysterious-number - 6174
2. http://en.wikipedia.org/wiki/6174_%28number %29
3. http://en.wikipedia.org/wiki/6174_%28number %29
4. http://en.wikipedia.org/wiki/6174_%28number %29
5. https://plus.maths.org/content/mysterious-number -6174
6. http://www.jamokam.blogfa.com
7. https://plus.maths.org/content/mysterious-number -6174
8. https://plus.maths.org/content/mysterious-number -6174
9. https://plus.maths.org/content/mysterious-number -6174
10. https://plus.maths.org/content/mysterious-number -6174



اگر برای عددهای حقیقی x و y داشته باشیم: $x+y=1$ و $|x|\leq 1$ و $|y|\leq 1$، ماکزیمم $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$ کدام است؟

الف) $\sqrt{3}$ ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ج) $2\sqrt{3}$ د) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

هـ) ۱